

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

$\ll \text{Αν το } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| \text{ υπάρχει τότε πάντα υπάρχει και το } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \gg$

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α)

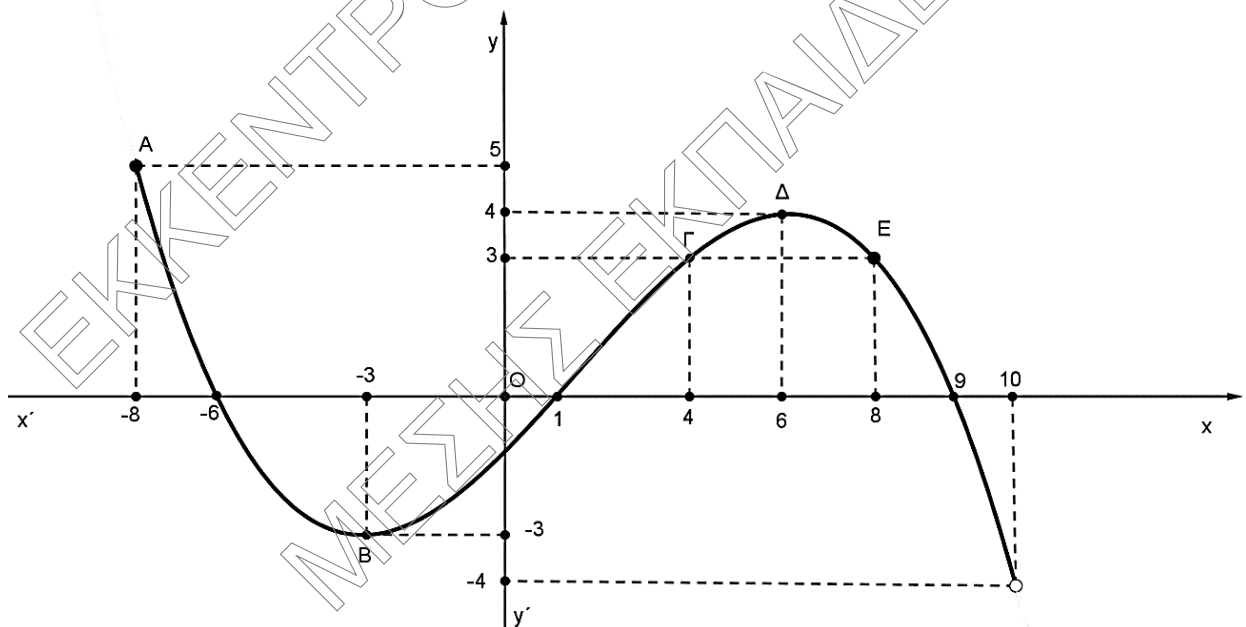
Μονάδες 3

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:
- α)** Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$ τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
 - β)** Μια συνάρτηση f είναι 1-1 αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση της f τουλάχιστον σε ένα σημείο.
 - γ)** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta \mu x| > |x|$
 - δ)** Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε δεν θα είναι συνεχής σε αυτό.
 - ε)** Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα διαστήματα μονοτονίας της καθώς και το σύνολο τιμών της σε κάθε ένα από αυτά.

Μονάδες 6

B2. Να υπολογίσετε τα όρια (αν υπάρχουν)

(i) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x) - 4}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{f(x)}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(f(x))}{x - 1}$

Μονάδες 9

B3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (4, 6)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \pi$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $3 < f(x_0 + 2) < 4$

Μονάδες 5

B4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2021(f(x) - 2021) \cdot f(x) + 2021 = f(x)$ έχει τρεις ακριβώς ρίζες.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ή για τις οποίες ισχύει:

- $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = ax^2 + \beta$ όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$ στην οποία την γραφική παράσταση εφάπτεται η ευθεία $y = -2x + 5$ στο σημείο $A(1, f(1))$
- $g(x) = \sqrt{x}$, για κάθε $x \geq 0$
- $h(x) = -x + 4, x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι:

(α) $f(x) = -x^2 + 4, x \geq 0$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

(β) ορίζεται η $g \circ h$ με $(g \circ h)(x) = \sqrt{4 - x}$

Μονάδες 1

Γ2.

(α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι οι συναρτήσεις $f^{-1}, g \circ h$ είναι ίσες.

Μονάδες 5

(β) Να δείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f^{-1}(x) + x) = -\infty$

Μονάδες 4

Γ3.

(α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της f που διέρχεται από το σημείο $A(0,8)$

Μονάδες 3

(β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} τέμνονται σε σημείο (x_0, y_0) όπου το x_0 ανήκει στο διάστημα $(1, x_1)$, όπου x_1 η τετμημένη του σημείου επαφής της εφαπτομένης του ερωτήματος **Γ3(α)** με την C_f

Μονάδες 3

Γ4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\left((x^2 - 4)^2 + x - 4 \right) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{(f(x) - f^{-1}(x))} \right) \right]$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

- $x^2 \cdot f^2(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x)$ για κάθε $x > 0$
- τέμνει την $y = x$ σε ένα μόνο σημείο.

Δ1. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = 0$ και ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

Μονάδες 6

Δ2.

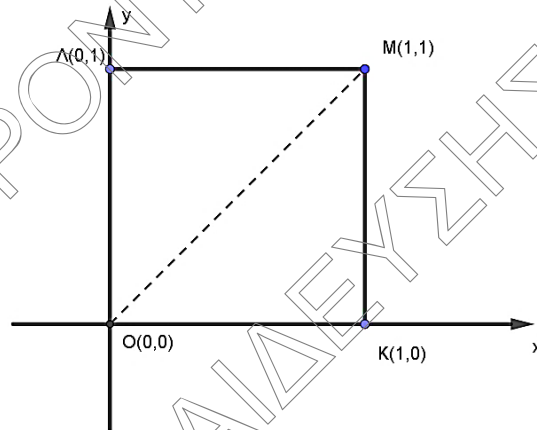
- (α) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης ευθείας της f στο σημείο της $M(1,1)$ και τα σημεία A, B που αυτή τέμνει τους άξονες x' και y' αντίστοιχα.

Μονάδες 3

- (β) Να δείξετε ότι το M είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB και το τρίγωνο OAB έχει εμβαδόν $E = 2\tau.μ$

Μονάδες 2

- Δ3.** Αν $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο $OKML$ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0), K(1,0), M(1,1)$ και $L(0,1)$ να δείξετε ότι:



- (α) η C_g τέμνει την διαγώνιο OM του τετραγώνου μόνο σε ένα σημείο

Μονάδες 6

- (β) $g(x^3) - g(x^2) \geq x^3 - x^2$ για κάθε $x \in [0,1]$

Μονάδες 3

- Δ4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^4 + 8x^3 = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $h(x) = -x^2 - 1$ έχουν μια κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 5